2019-2020 Eğitim-öğretim Yılı 21.05.2020

FONKSİYONEL ANALİZ <u>FİNAL</u> SINAV SORULARI

1) (X,d), (Y,m) metrik uzayları izometrik izomorf iseler bu uzayların homeomorf olduklarını gösteriniz.

2) X_d, Y_m metrik uzaylar ve $f: X_d \to Y_m$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

f düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ X_d metrik uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi için $(f(x_n))$ dizisi Y_m metrik uzayında bir Cauchy dizisidir, ispatlayınız.

3) a) (X,d) metrik uzayında $S(x;r)$ yuvar yüzeyinin kapalı bir küme olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbb{R}^2, d_A)$ ayrık metrik uzayında $S(0;1)$ kümesini bulunuz.

c) $d: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ olarak veriliyor. $B(0;\delta) = \mathbb{N} \cap (-\delta,\delta)$ olduğunu gösteriniz.

4) $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ X vektör uzayında denk iki norm olsun. Bu takdirde

$(X, \|\cdot\|_1)$ Banach uzayıdır $\Leftrightarrow$ $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach uzayıdır, gösteriniz.

5) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $x \in X$ için

$\|x\|_1 = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|}$ olmak üzere $\|\cdot\|_1$ fonksiyonunun X üzerinde bir norm olup olmadığını gösteriniz.

<u>Not:</u> Her soru eşit puanlıdır.
Süre 9:00 – 11:00 olup 120 dakikadır.
E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir.
Başarılar...

Prof. Dr.
Birsen SAĞIR DUYAR

2019-2020 Eğitim-öğretim yılı MAT 468
FONKSİYONEL ANALİZ FİNAL SORU ÇÖZÜMLERİ

(1) $f: X_d \to Y_m$ izometrik izomorf olduğundan birebir, örten izometridir. f ve f^{-1} sürekli olduğu gösterilirse f nin homeomorf olduğu gösterilmiş olur. $\forall \varepsilon>0$ verilsin. $d(x,x_0)<\delta$ olan $\forall x, x_0 \in X$ için

$$m(f(x), f(x_0)) \overset{\text{izometri}}{=} d(x,x_0) < \delta$$

olup, $\delta=\varepsilon$ seçilirse f sürekli olur.

$f^{-1}: Y_m \to X_d$, $y_0 \in Y$ keyfi olsun. $f^{-1}(y), f^{-1}(y_0) \in X$ dir.

Keyfi $\varepsilon>0$ için $\delta=\varepsilon$ seçilirse $m(y,y_0)<\delta$ olan $\forall y, y_0 \in Y$ için

$$d(f^{-1}(y), f^{-1}(y_0)) \overset{\text{izometri}}{=} m(f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(y_0)))$$
$$\overset{f \text{ 1-1 örten}}{=} m(y,y_0) < \delta = \varepsilon$$

olup, f^{-1} sürekli olur.

(2) Herhangi $\varepsilon>0$ verilsin. $f: X_d \to Y_m$ düzgün sürekli olduğundan $d(x,y)<\delta$ olan $\forall x,y \in X$ için $m(f(x),f(y))<\varepsilon$ dur (1) olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır. (x_n) Cauchy dizisi olduğundan bu $\delta>0$ sayısına karşılık her $m,n>n_0$ için $d(x_n,x_m)<\delta$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $\forall n,m>n_0$ için $\overset{(1)\text{den}}{} m(f(x_n), f(x_m))<\varepsilon$ olur. Yani $(f(x_n))$ dizisi (Y,m) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

"$\Leftarrow$": Aksini kabul edelim. Bu durumda bir $\varepsilon>0$ sayısı ve bir (x_n) Cauchy dizisi vardır öyle ki yeteri kadar büyük her $n,m>n_0$ için

$d(x_n,x_m)<\frac{1}{n}$ fakat $m(f(x_n),f(x_m)) \geq \varepsilon$ dir.

Yani (x_n) Cauchy dizisi fakat $(f(x_n))$ Cauchy dizisi değildir. Bu hipotez ile çelişir. O halde f düzgün süreklidir.

(3) a) $S(x;r)$ nin kapalı olduğunu göstermek için $S(x;r)^c = X - S(x;r)$ tümleyen kümesinin açık olduğunu göstermek gerekir.

$$S(x,r)^c = B(x;r) \cup \bar{B}(x;r)^c$$

olduğundan iki açık kümenin birleşimi olarak $S(x,r)^c$ kümesi açıktır. Dolayısıyla $S(x;r)$ kapalıdır.

b) $S(0;1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_A((0,0),(x,y)) = 1\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $B(0;\delta) = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid d((0,0),(n,m)) < \delta\}$

$= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |n-m| < \delta\} = \mathbb{N} \cap (-\delta, \delta)$

(4) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ olduğundan $\|x\|_2 \leq b\,\|x\|_1$ olacak şekilde $b>0$ sayısı vardır. $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach uzayı olsun. (x_n), $\|\cdot\|_1$ -normuna göre keyfi Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,m > n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{b}$ dir.

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq b \cdot \|x_n - x_m\|_1 < b \cdot \frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon \quad (\forall n,m \geq n_0 \text{ için})$$

olduğundan (x_n), $\|\cdot\|_2$ -normuna göre Cauchy dizisidir. $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach uzayı olduğundan $\|x_n - x\|_2 \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Normların denkliğinden $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ dir.

$\forall n > N$ için $\|x_n - x\|_2 \leq a \cdot \frac{\varepsilon}{a}$ o.ş. $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$$a \cdot \|x_n - x\|_1 \leq \|x_n - x\|_2 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 \leq \frac{1}{a} \|x_n - x\|_2 < \frac{1}{a} \cdot a\varepsilon = \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n > N$ için $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon$ olur ki bu $\|x_n - x\|_1 \to 0$ yani $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach uzayı olur.

Diğer durum aynı şekilde gösterilir.

(5) $\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\,\|x\|_1$ mi dir? $x = 1$, $\lambda = 2$ alınırsa

$$\left.\begin{aligned} \|2 \cdot 1\|_1 &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \\ |2| \cdot \|1\|_1 &= 2 \cdot \frac{1}{1+1} = 1 \end{aligned}\right\} \frac{1}{3} \neq 1$$

olup $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|_1$

N2 koşulu sağlanmaz.

$\|\cdot\|_1$, X de norm değildir.